УДК 519.7

КЛОНЫ, КО-КЛОНЫ, ГИПЕРКЛОНЫ И СУПЕРКЛОНЫ

Н.А. Перязев

Аннотация

Вводится в рассмотрение операция разрешимости на множестве частичных гиперопераций. Определяется суперклон как алгебра с основным множеством частичных гиперопераций и двуместной операцией подстановки, одноместными операциями циклической перестановки аргументов, транспозиции аргументов, отождествления аргументов, разрешимости и нульместными операциями, выделяющими операцию проектирования и всюду неопределенную операцию. Изучается отношение суперклонов к частичным гиперклонам, ко-клонам, клонам. Доказано утверждение об изоморфизме решетки суперклонов и решетки ко-клонов над одинаковыми множествами.

Ключевые слова: операция разрешимости, гипероперация, клон, суперклон, частичная гипероперация, частичный гиперклон, ко-клон, решетка.

Введение

Исследования по конечным функциональным системам начаты в работах Е. Поста [1, 2]. В нашей стране изучение таких систем начал С.В. Яблонский [3, 4]. Алгебраический подход к изучению функциональных систем впервые был предложен А.И. Мальцевым [5, 6]. Среди алгебр функций наибольшее распространение получили клоны – алгебры операций, замкнутые относительно суперпозиции и содержащие селекторные операции [7, 8]. Наряду с клонами исследуются алгебры отношений (ко-клоны), алгебры частичных операций (частичные клоны), алгебры гипреопераций (гиперклоны), алгебры частичных гиперопераций (частичные гиперклоны). Известны соотношения между этими понятиями. Так, решетка клонов антиизоморфна решетке ко-клонов над одним и тем же множеством [9]. Добавляя к частичным гиперклонам операцию разрешимости простейшего уравнения, получим алгебру, которую назовем суперклоном [10, 11]. Как будет доказано, суперклоны эквивалентны ко-клонам. Но, имея функциональную структуру, суперклоны во многом схожи с клонами. Это позволит, в частности, получить новый метод для изучения решетки клонов.

1. Основные понятия

Отображение из A^n в A называется n-местной операцией на A (будем допускать случай $n=0$). Множество всех n-местных операций на A обозначаем через P_A^n, если при этом A является k-элементным множеством, то используем обозначение P_k^n. Используем также обозначения $P_A = \bigcup\limits_{n\geq 0} P_A^n$ и $P_k = \bigcup\limits_{n\geq 0} P_k^n$.

Пусть $F \subseteq P_A$. Алгебра $\mathfrak{F} = \langle F; *, \zeta, \tau, \Delta, \varepsilon\rangle$ типа $\langle 2,1,1,1,0\rangle$ с определенными ниже операциями подстановки $(f*g)$, циклической перестановки аргументов (ζf), транспозиции аргументов (τf), отождествления аргументов (Δf) и операцией ε, выделяющей операцию $e_1^2 \in P_A^2$ называется *клоном* над A.

Если $f \in F \cap P_A^n$ и $g \in F \cap P_A^m$, то:

$(f * g)(a_1, \ldots, a_{n+m-1}) = f(g(a_1, \ldots, a_m), a_{m+1}, \ldots, a_{n+m-1})$ при $n \geq 1$;

$(f * g)(a_1, \ldots, a_m) = f$ при $n = 0$;

$(\zeta f)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_2, \ldots, a_n, a_1)$ при $n > 1$ и $(\zeta f) = f$ при $n \leq 1$;

$(\tau f)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_2, a_1, a_3, \ldots, a_n)$ при $n > 1$ и $(\tau f) = f$ при $n \leq 1$;

$(\Delta f)(a_1, \ldots, a_{n-1}) = f(a_1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ при $n > 1$,

$(\Delta f) = b$, если $f(a) = b$ для всех $a \in A$, иначе $(\Delta f) = f$ при $n = 1$,

$(\Delta f) = f$ при $n = 0$;

$\varepsilon = e_1^2$, где $e_1^2(a_1, a_2) = a_1$.

Отношением местности n на A называется любое подмножество A^n, при этом считаем, что $A^0 = \varnothing$. Множество всех n-местных отношений над A обозначаем через R_A^n, если при этом A является k-элементным множеством, то используем обозначение R_k^n. Используем также обозначения $R_A = \bigcup\limits_{n \geq 0} R_A^n$ и $R_k = \bigcup\limits_{n \geq 0} R_k^n$.

Пусть $E \subseteq R_A$. Алгебра $\mathfrak{E} = \langle E; \times, \zeta, \tau, \Delta, \pi, \delta \rangle$ типа $\langle 2, 1, 1, 1, 1, 0 \rangle$ с определенными ниже операциями произведения $(q \times t)$, циклической перестановки компонент (ζq), транспозиции компонент (τq), отождествления компонент (Δq) проекции по компоненте(πq) и операцией δ, выделяющей отношение $d \in R_A^2$, называется *ко-клоном* над A:

$(q \times t) = \{\langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \rangle | \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in q$ и $\langle b_1, \ldots, b_m \rangle \in t\}$;

$(\zeta q) = \{\langle a_2, \ldots, a_n, a_1 \rangle | \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in q\}$ при $n > 1$;

$(\tau q) = \{\langle a_2, a_1, a_3, \ldots, a_n \rangle | \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in q\}$ при $n > 1$;

$(\Delta q) = \{\langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle | \langle a_1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \rangle \in q\}$ при $n > 1$;

$(\zeta q) = (\tau q) = (\Delta q) = q$, при $n \leq 1$;

$(\pi q) = \{\langle a_2, \ldots, a_n \rangle | \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in q\}$ при $n > 1$,

$(\pi q) = \varnothing$ при $n \leq 1$;

$\delta = d$, где $d = \{\langle a, a \rangle |$ для всех $a \in A\}$.

Через главные операции ко-клона стандартным образом определяются операции $(\Delta_{i,j}\ q)$ отождествления i-й и j-й компонент и операции $(\pi_i\ q)$ проекции по i-й компоненте.

Пусть $B(A)$ – множество всех подмножеств A, в том числе $\varnothing$. Отображение из A^n в $B(A)$ называется n-местной частичной гипероперацией на A (также говорят частичная мультиоперация или недоопределенная частичная функция). Для множества всех n-местных частичных гиперопераций на A используем обозначение H_A^n, при $|A| = k$ – обозначение H_k^n.

Пусть $G \subseteq H_A$. Алгебру $\mathfrak{G} = \langle G; *, \zeta, \tau, \Delta, \varepsilon \rangle$ типа $\langle 2, 1, 1, 1, 0 \rangle$ называют *частичным гиперклоном* над A, где операции определяются следующим образом:

$(f * g)(a_1, \ldots, a_{n+m-1}) = \{a|$ существует $a_0 \in g(a_1, \ldots, a_m)$ такой, что

$a \in f(a_0, a_{m+1}, \ldots, a_{m+n-1})\}$ при $n \geq 1$ и $(f * g)(a_1, \ldots, a_m) = f()$ при $n = 0$;

$(\zeta f)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_2, \ldots, a_n, a_1)$ при $n > 1$ и $(\zeta f) = f$ при $n \leq 1$;

$(\tau f)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_2, a_1, a_3, \ldots, a_n)$ при $n > 1$ и $(\tau f) = f$ при $n \leq 1$;

$(\Delta f)(a_1, \ldots, a_{n-1}) = f(a_1, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ при $n > 1$,

$(\Delta f) = \{a | a \in f(a)\}$ при $n = 1$, и $(\Delta f) = f$, при $n = 0$;

$\varepsilon = e_1^2$, где $e_1^2(a_1, a_2) = \{a_1\}$.

На множестве частичных гиперопераций введем следующим образом новую операцию, которую назовем операцией разрешимости:

$(\mu f)(a_1,\ldots,a_n)=\{a|a_1\in f(a,a_2,\ldots,a_n)\}$, при $n\geq 1$;

$(\mu f)=f$ при $n=0$.

Пусть операция $\emptyset$, выделяет нульместную операцию $o()=\varnothing$.

Алгебру $\mathfrak{K}=\langle K;*,\zeta,\tau,\Delta,\mu,\varepsilon,\emptyset\rangle$ типа $\langle 2,1,1,1,1,0,0\rangle$, где $K\subseteq H_A$, назовем ***суперклоном*** над A. Мощность множества A называется ***рангом*** клона (ко-клона, гиперклона, суперклона).

Стандартным образом определяется суперклон, порожденный множеством частичных гиперопераций, и для этого используется общепринятое обозначение $\langle f_1,\ldots,f_m\rangle$.

Используя главные операции суперклона, можно определить:

1) гипероперации проекции по i-му аргументу $e_i^n(a_1,\ldots,a_n)=\{a_i\}$;

2) операцию транспозиции i-го и j-го аргументов

$$(\tau_{i,j}f)(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_j,\ldots,a_n)=f(a_1,\ldots,a_j,\ldots,a_i,a_i,\ldots,a_n);$$

3) операцию отождествления j-го аргумента с i-м аргументом

$$(\Delta_{i,j}f)(a_1,\ldots,a_{j-1},a_{j+1},\ldots,a_n)=f(a_1,\ldots,a_{j-1},a_i,a_{j+1},\ldots,a_n);$$

4) операцию подстановки на место i-го аргумента

$$(f*_i g)(a_1,\ldots,a_{n+m-1})=\bigcup_{b\in g(a_i,\ldots,a_{i+m-1})} f(a_1,\ldots,a_{i-1},b,a_{i+m},\ldots,a_{n+m-1});$$

5) суперпозицию частичных гиперопераций

$$(f*(f_1,\ldots,f_n))(a_1,\ldots,a_m)=\bigcup_{b_i\in f_i(a_1,\ldots,a_m)} f(b_1,\ldots,b_n).$$

Частичные гипероперации f на множестве $\{a_0,\ldots,a_{k-1}\}$ можно представлять как функции из $\{2^0,2^1,\ldots,2^{k-1}\}$ в $\{0,1,\ldots,2^k-1\}$, получаемые из f при кодировке $a_i\to 2^i;\{a_{i_1},\ldots,a_{i_s}\}\to 2^{i_1}+\ldots+2^{i_s};\varnothing\to 0$.

В дальнейшем это представление частичных гиперопераций будет постоянно использоваться.

Нужно отметить, что в суперклонах для суперпозиции не выполняется тождество суперассоциативности

$$((f*(g_1,\ldots,g_n))*(h_1,\ldots,h_m))=(f*((g_1*(h_1,\ldots,h_m)),\ldots,(g_n*(h_1,\ldots,h_m)))).$$

Действительно, для операций $\cap,f_1,f_2$, определенных на $A=\{1,2\}$ следующим образом:

$$\cap(a,b)=\begin{cases}a, & \text{если } a=b;\\ 0, & \text{если } a\neq b.\end{cases}$$

$$f_1(a)=\begin{cases}1, & \text{если } a=1;\\ 3, & \text{если } a=2.\end{cases}$$

$$f_2(a)=\begin{cases}3, & \text{если } a=1;\\ 1, & \text{если } a=2,\end{cases}$$

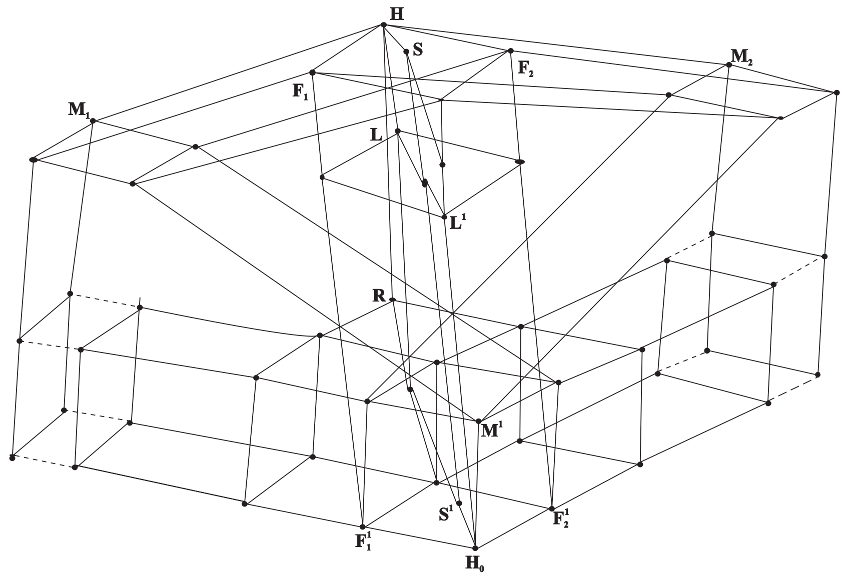

Рис. 1. Решетка суперклонов ранга 2

получаем

$$(1) = ((\cap * (f_1, f_2)) * (3)) \neq (\cap * ((f_1 * (3)), (f_2 * (3)))) = (3).$$

Отсутствие свойства суперассоциативности суперпозиции является основной сложностью при изучении суперклонов, порождаемых множествами частичных гиперопераций.

2. Соответствие суперклонов и ко-клонов

Как легко заметить, каждой n-местной частичной гиперопераций на A взаимно однозначно соответствует $(n+1)$-местное отношение на A.

Определим $\chi : H_A^n \to R_A^{n+1}$ так: $\chi(f) = \{\langle a_1, \ldots, a_n, b\rangle | b \in f(a_1, \ldots, a_n)\}$.

Теорема 1. 1) *Пусть* $\mathfrak{K} = \langle K; *, \zeta, \tau, \Delta, \mu, \varepsilon, \varnothing\rangle$ *– суперклон над* A. *Тогда* $\chi(\mathfrak{K}) = \langle \chi(K); \times, \zeta, \tau, \Delta, \pi, \delta\rangle$ *является ко-клоном над* A.

2) *Пусть* $\mathfrak{E} = \langle E; \times, \zeta, \tau, \Delta, \pi, \delta\rangle$ *– ко-клон над* A. *Тогда* $\chi^{-1}(\mathfrak{E}) = \langle \chi^{-1}(E); *, \zeta, \tau, \Delta, \mu, \varepsilon, \varnothing\rangle$ *является суперклоном над* A.

Доказательство. 1) На $\chi(K)$ операции ко-клона представимы следующим образом.

Пусть $f \in K \cap H_A^n$ и $g \in K \cap H_A^m$. Тогда

$\delta = \chi(\Delta\ \varepsilon)$; $(\zeta\ \chi(f)) = \chi(\mu f)$;

$(\tau\ \chi(f)) = \chi(\tau f)$, при $n \neq 1$, и $(\tau \chi(f)) = \chi(\mu f)$, при $n = 1$;

$(\Delta\ \chi(f)) = \chi(\Delta f)$;

$(\pi\ \chi(f)) = \chi(f * (\Delta^2\ \varepsilon))$;

$(\chi(f) \times \chi(g)) = \chi((\Delta_{2,n+2}(\ldots(\Delta_{n,2n}(((e_3^3 *_3 g) *_2 (\mu f)) *_1 f)\ldots)$.

В силу полученных формул, так как $f \in K$, $g \in K$ и K образует суперклон, то $\chi(K)$ образует ко-клон.

2) На $\chi^{-1}(E)$ операции суперклона представимы следующим образом.

Пусть $q \in E \cap R_A^n$ и $t \in E \cap R_A^m$. Тогда
$\varepsilon = \chi^{-1}((\zeta\ (\delta \times (\pi\ \delta))))$; $\phi = \chi^{-1}((\pi^2\ \delta))$;
$(\zeta\ \chi^{-1}(q)) = \chi^{-1}((\zeta^2\ (\tau\ (\zeta^{n-1}\ q))))$;
$(\tau\ \chi^{-1}(q)) = \chi^{-1}(\tau\ q)$ при $n > 2$ и $(\tau\ \chi^{-1}(q)) = \chi^{-1}(q)$ при $n \leq 2$;
$(\Delta\ \chi^{-1}(q)) = \chi^{-1}(\Delta\ q)$;
$(\mu\ \chi^{-1}(q)) = \chi^{-1}((\zeta\ (\tau\ (\zeta^{n-1}\ q))))$;
$(\chi^{-1}(q) * \chi^{-1}(t)) = \chi^{-1}(\pi_n\ (\Delta_{n,n+1}(t \times q)))$.

В силу полученных формул, так как $q \in E$, $t \in E$ и E образует ко- клон, то $\chi^{-1}(E)$ образует суперклон. □

Пусть $L(\mathfrak{A}) = \langle L(\mathfrak{A}); \subseteq \rangle$ – решетка подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$.

Следствие. *Верны следующие соотношения:*
1) *решетка суперклонов $L(\mathfrak{K}_A)$ изоморфна решетке ко-клонов $L(\mathfrak{R}_A)$;*
2) *решетка суперклонов $L(\mathfrak{K}_A)$ антиизоморфна решетке клонов $L(\mathfrak{P}_A)$.*

Для полноты изложения приведем диаграмму решетки суперклонов ранга 2 (перевернутая решетка Поста).

На диаграмме (рис. 1) приведены обозначения только для наибольшего, наименьшего, 7-ми максимальных и 5-ти минимальных суперклонов. Определим эти суперклоны через порождающие их частичные гипероперации. При этом для определения гипероперации будем использовать векторное задание.

$H = \langle\ (21), (1333)\ \rangle$	$H_0 = \langle\ \ \rangle$
$L = \langle\ (1), (2112)\ \rangle$	$L^1 = \langle\ (12212112)\ \rangle$
$S = \langle\ (2331)\ \rangle$	$S^1 = \langle\ (21)\ \rangle$
$F_1 = \langle\ (31), (1333)\ \rangle$	$F_1^1 = \langle\ (1)\ \rangle$
$F_2 = \langle\ (23), (3332)\ \rangle$	$F_2^1 = \langle\ (2)\ \rangle$
$M_1 = \langle\ (1), (23), (1333)\ \rangle$	$M^1 = \langle\ (13)\ \rangle$
$M_2 = \langle\ (2), (31), (3332)\ \rangle$	
$R = \langle\ (31), (23)\ \rangle$	

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 07-01-00240 и 09-01-00476).

Summary

N.A. Peryazev. Clones, Co-Clones, Hyperclones and Superclones.

Resolvability operation on set of partial hyperoperations is introduced into consideration. The superclone is defined as algebra with the basic set of partial hyperoperations and two-place operation of substitution, single operations of cyclic shift of arguments, of argument transposition, of argument identification, of resolvability and nullary operations specifying operation of designing and everywhere uncertain operation. The relation of superclones to partial hyperclones, to co-clones, and to clones is studied. The statement about isomorphism of a lattice of superclones and lattice of co-clones over identical sets is proved.

Key words: resolvability operation, hyperoperation, clone, superclone, partial hyperoperation, partial hyperclone, co-clone, lattice.

Литература

1. *Post E.* Determination of all closed systems of truth tables // Bull. Amer. Math. Soc. – 1920. – V. 26. – P. 427.
2. *Post E.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer J. Math. – 1921. – V. 43. – P. 163–185.
3. *Яблонский С.В.* О суперпозициях функций алгебры логики // Матем. сб. – 1952. – Т. 30, № 2. – С. 329–348.
4. *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды Матем. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. – 1958. – Т. 51. – С. 5–142.
5. *Мальцев А.И.* Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. – 1966. – № 2. – С. 3–26.
6. *Мальцев А.И.* Итеративные алгебры Поста. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1976. – 100 с.
7. *Szendrei A.* Clones in universal algebra. – Montreal: Les Presses de l'Universite de Montreal, 1986. – 166 p.
8. *Lau D.* Function Algebras on Finite Sets. – Springer-Verlag Berlin YeideWater Resourses Research, 2006. – 668 p.
9. *Бондарчук В.Г., Калужнин Л.А., Котов В.Н., Ромов Б.А.* Теория Галуа для алгебр Поста // Кибернетика. – 1969. – № 3. – С. 1–10; № 5. – С. 1–9.
10. *Перязев Н.А.* Недоопределенные частичные булевы функции // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. докл. XV междунар. конф. (Казань, 2–7 июня 2008 г.). – Казань: Отечество, 2008. – С. 92.
11. *Перязев Н.А.* Суперклоны недоопределенных частичных функций // Синтаксис и семантика логических систем: Материалы рос. школы-семинара (Владивосток, 25–29 августа 2008 г.). – Владивосток: Дальнаука, 2008. – С. 40–42.

Поступила в редакцию
31.03.09

Перязев Николай Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической информатики Иркутского государственного педагогического университета.

E-mail: *nikolai.baikal@gmail.com*